

## Recherche Opérationnelle

### TD 3 : Algorithmique de graphes

Responsable du cours : Emmanuel Hyon et François Delbot maîtres de conférences

Chargés de TD : Lise Rodier et Farah Ait Salaht

### Exercice 1

L'algorithme de Bellman-Ford résout le problème des plus courts chemins avec origine unique dans le cas le plus général où les poids des arcs peuvent avoir des valeurs négatives. Étant donné un graphe orienté pondéré  $G = (V, E)$ , de fonction de poids  $w$ , et une origine  $s$ , l'algorithme retourne une valeur booléenne indiquant s'il existe un circuit de poids négatif accessible depuis  $s$ . S'il n'en existe pas, l'algorithme donne les plus courts chemins ainsi que leurs poids.

Les notations sont les suivantes :  $\pi[v]$  contient le prédécesseur de  $v$  sur le chemin (NIL s'il n'y en a pas),  $\delta(u, v)$  est le poids du plus court chemin de  $u$  vers  $v$  ( $\infty$  s'il n'existe pas),  $d[v]$  est une variable qui est une borne supérieure du poids du plus court chemin de  $s$  vers  $v$ . On définit le poids d'un chemin  $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ , est  $w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$ .

---

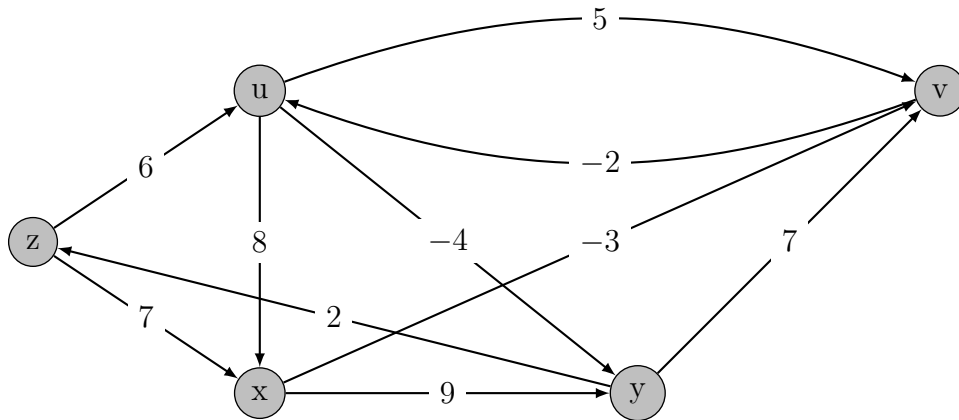
#### Algorithm 1 Bellman-Ford ( $G, w, s$ )

---

```
1: Pour tout sommet  $v \in V$  faire // Initialisation
2:    $d[v] \leftarrow \infty, \pi[v] = NIL$ 
3:  $d[s] \leftarrow 0$ 
4: Pour  $i$  de 1 à  $|V| - 1$  faire
5:   Pour tout arc  $(u, v) \in E$  faire // relâchement de l'arc  $(u, v)$ 
6:     Si  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  alors
7:        $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v), \pi[v] \leftarrow u$ 
8: Pour tout arc  $(u, v) \in E$  faire // détection des circuits négatifs
9:   Si  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  alors
10:    retourner Faux
11: retourner Vrai
```

---

On considère le graphe ci-dessous. Faire tourner l'algorithme en prenant comme source le sommet  $z$ . Même question en changeant le poids de l'arc  $(y, v)$  à 4.



## Exercice 2

### Graphe biparti

Un graphe non orienté  $G$  est dit **biparti** s'il existe une partition de  $v(G)$  en deux ensembles  $X$  et  $Y$  telle que tout arête de  $G$  joint un sommet de  $X$  à un sommet de  $Y$ .

Montrer que  $G$  est biparti si et seulement si  $G$  ne contient aucun cycle de longueur impaire.

## Exercice 3

Une assemblée est formée de personnes parlant plusieurs langues différentes (voir tableau ci-après). On veut former des binômes de personnes qui pourront dialoguer entre elles. Comment maximiser le nombre de binômes ?

	Allemand	Anglais	Arabe	Chinois	Français	Espagnol	Russe
Alfred				X	X		
Bernard	X					X	
Claude					X	X	
Denis	X						
Ernest		X					
Fabien		X			X		X
Georges		X			X		
Henri			X	X		X	
Isidore					X		X
Joseph		X	X				
Kurt	X	X					
Louis							X

## Exercice 4

Une marieuse essaie de former le plus de couples possible avec 6 filles et 6 garçons en fonction de critères de compatibilité (d'humeur). Elle a dressé le tableau d'incompatibilités ci-dessous. Une croix indique que deux personnes sont incompatibles. Combien de couples pourra-t-elle former au maximum ?

	Anne	Béatrice	Carine	Denise	Eléonore	Florence
Alfred	+	+		+	+	
Bernard						+
Claude	+			+	+	+
Denis	+				+	+
Eric		+	+			
Fabien	+		+	+	+	+

## Exercice 5

### Couplage

- ▶ **Un couplage maximum** est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes.
- ▶ **Un couplage maximal** est un couplage tel que toute arête a au moins un sommet extrémité qui appartient au couplage.

Un premier algorithme naïf pour trouver un couplage maximum est la suivante :

- choisir une arête  $a$

- rechercher un couplage maximum parmi ceux ne contenant pas  $a$  ;
- rechercher un couplage maximum parmi ceux contenant  $a$  ;
- en déduire un couplage maximum.

Il n'est pas demandé d'écrire totalement un tel algorithme.

1. Quelle type de programmation serait appropriée à l'écriture d'un tel algorithme ?
2. À première vue, quelle en serait la complexité ? Est-ce bien raisonnable pour résoudre un tel problème.

## Exercice 6

Ici, on suppose que le graphe  $G$  est biparti :  $G = (X \cup Y; E)$ , avec  $E$  qui est décomposé en l'union de deux sous ensembles disjoints  $X$  et  $Y$ .

- **Question 1** : On dit qu'un couplage  $C$  est un couplage maximal s'il n'est inclus strictement dans aucun autre couplage. C'est à dire qu'il n'existe pas de couplage dont une sous-partie est  $C$ . Donner un algorithme de construction d'un mariage maximal (i.e. Le graphe est bi parti).
- **Question 2** : Une autre définition (équivalente) d'un couplage maximum. On dit qu'un couplage est maximum s'il n'existe pas de couplage de cardinalité supérieure. Tout couplage maximal est-il maximum ?
- **Question 3** : Soit  $C$  un couplage. Un chemin  $C$ -alterné est un chemin de  $G$  qui alterne entre arêtes de  $C$  et arêtes de  $E \setminus C$ . On définit un chemin  $C$ -augmentant comme un chemin  $C$ -alterné qui commence et finit par des sommets qui ne sont extrémité d'aucune arête de  $C$  (on dit qu'ils sont insaturés). Montrer qu'il existe un chemin  $C$ -augmentant si et seulement si  $C$  n'est pas un couplage maximum.

## Exercice 7

### Couplage parfait

Un couplage parfait  $C$  est un couplage tel que chaque sommet du graphe est l'extrémité d'une arête de  $C$  exactement.

- **Question 1** : Montrer que si  $G = (V, E)$  contient un couplage parfait, alors  $|V|$  est pair.
- **Question 2** : Déterminer les entiers  $n$  tels que  $P(n)$  (chaîne à  $n + 1$  sommets) contient un couplage parfait.
- **Question 3** : Donner le nombre minimum d'arêtes d'un graphe à  $2p$  sommets contenant un couplage parfait.

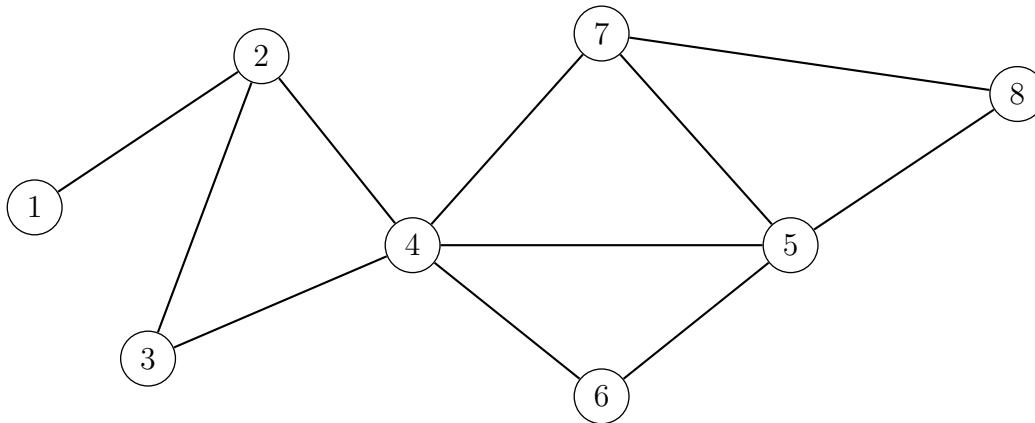
- **Question 4 :** Montrer que si un graphe ayant un nombre pair de sommets contient un cycle hamiltonien (un cycle passant exactement une fois par chaque sommet) alors il contient deux couplages parfaits disjoints. La réciproque est-elle vraie ?

## Exercice 8

### Coloration des sommets

- **Colorer** les sommets d'un graphe  $G = (X, E)$  consiste à leur associer des couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.
- Si  $k$  couleurs sont utilisées, on parle de  **$k$ -coloration**
- Le *nombre chromatique* de  $G$ , noté  $\gamma(G)$ , est la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle existe une  $k$ -coloration des sommets.

- Déterminer le nombre chromatique du graphe suivant :



Graphe  $G$

---

### Algorithm 2 Algorithme de coloration glouton de Welsh et Powell

---

- 1: Déterminer le degré de chaque sommet et ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (peu importe les ex aequo)
  - 2: En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à **chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur**.
  - 3: S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.
- 

- Donner le nombre chromatique d'un cycle à  $n$  sommets, de  $K_n$  et de  $K_{m,n}$  en fonction de  $m$  et  $n$ .

## Exercice 9

Déterminer un couplage parfait de poids minimum dans un graphe biparti pondéré suivant :

